Übungen: Normalverteilung

1. In Mathematanien wurde die Körpergröße aller Studenten gemessen. Es stellte sich heraus, dass die Größe normalverteilt ist, mit dem Erwartungswert μ = 175 cm und der Standardabweichung σ = 7,5 cm.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student
   a. kleiner als 160 cm
   b. größer als 180 cm
   c. zwischen 170 und 182 cm groß ist?

$$P(X \le 160) \quad = \quad \Phi_{\mu;\sigma}(-2) \quad = \quad 1-\Phi_{\mu;\sigma}(2) \quad = \quad 1-0{,}9772 \quad = \quad 0{,}0228$$

$$und \quad z = \frac{160-175}{7{,}5} = -2$$

$$P(X > 180) \quad = \quad 1-P(X \le 180) \quad = \quad 1-\Phi_{\mu;\sigma}(0{,}67) \quad = \quad 1-0{,}7486 \quad = \quad 0{,}2514$$

$$und \quad z = \frac{180-175}{7{,}5} = 0{,}67$$

$$P(170 \le X \le 182) \quad = \quad \Phi(0{,}93)-\Phi(-0{,}67) \quad = \quad \Phi(0{,}93)-\left[1-\Phi(0{,}67)\right]$$

$$P(170 \le X \le 182) \quad = \quad 0{,}8238-\left[1-0{,}7486\right] \quad = \quad 0{,}5724$$

$$z_1 = \frac{170-175}{7{,}5} = -\frac{2}{3} = -0{,}67 \quad und \quad z_2 = \frac{182-175}{7{,}5} = 0{,}93$$

Wie groß muss ein Student in Mathematanien sein, damit er

   d. zu den 20% kleinsten
   e. zu den 10% größten Studenten gehört?
   f. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Größen von 95% aller Studenten?

(Runde auf cm.)

$$P(X \le k) \quad = \quad \Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad = \quad 0{,}2 \quad \rightarrow \quad -0{,}84 = \frac{k-175}{7{,}5} \quad \rightarrow \quad k = 168{,}7$$

$$P(X \ge k) \quad = \quad 0{,}1 \quad \rightarrow \quad 1-P(X < k) \quad = \quad 0{,}1 \quad \rightarrow \quad P(X < k) \quad = \quad 0{,}9$$

$$\Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad = \quad 0{,}9 \quad \rightarrow \quad 1{,}28 = \frac{k-175}{7{,}5} \quad \rightarrow \quad k = 184{,}6$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - t\sigma \le X \le \mu + t\sigma) \overset{symmetrisch}{=} 2\Phi_{\mu;\sigma}(z) - 1 = 0{,}95$$

$$2\Phi_{\mu;\sigma}(z) - 1 = 0{,}95 \xrightarrow[:2]{+1} \Phi_{\mu;\sigma}(z) = 0{,}975$$

$$\rightarrow \quad 1{,}96 = \frac{k - 175}{7{,}5} \quad \rightarrow \quad k_2 = 189{,}7 = 175 + 14{,}7 \quad \rightarrow \quad k_1 = 175 - 14{,}7 = 160{,}3$$

$$\rightarrow \quad 14{,}7 = t \cdot 7{,}5 \quad \rightarrow \quad t = \frac{14{,}7}{7{,}5} = 1{,}96$$

→ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1{,}96\sigma \; [Tabelle: 0{,}975]$

→ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1{,}64\sigma \; [Tabelle: 0{,}95]$

→ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2{,}58\sigma \; [Tabelle: 0{,}995]$

2. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit μ = 3200 g und σ = 800 g.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes
   a. mehr als 3000 g
   b. weniger als 2500 g
   c. zwischen 4000 und 5000 g wiegt?

3. Die Äpfel in einer Lieferung wiegen durchschnittlich 180 g, mit einer Standardabweichung von 50 g. Man kann annehmen, dass das Gewicht eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Wie viel Prozent der Äpfel wiegen
   a. weniger als 150 g
   b. mehr als 175 g
   c. zwischen 200 und 250 g?
   d. 10% der Äpfel werden aussortiert, weil sie zu leicht sind. Wie schwer kann ein Apfel höchstens sein, wenn er aussortiert wird?
   e. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Gewichte von 50% aller Äpfel? (Quartile)

Nennen Sie die 6 Sigma-Intervalle:
+/- kσ   k = {1;2;3}   => genaue W'keit
90%, 95% und 99%-Intervalle   => Grenzen

Einfaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 0{,}6826$$

$$z_2 = \frac{k_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma} = 1$$

$$z_1 = \frac{k_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

Zweifaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$$

$$z_2 = \frac{k_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{2\sigma}{\sigma} = 2$$

$$z_1 = \frac{k_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{-2\sigma}{\sigma} = -2$$

Dreifaches Sigma-Intervall:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974$$

90%, 95% und 99%-Intervalle => Grenzen

- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1{,}64\sigma\ [Tabelle: 0{,}95]$
- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1{,}96\sigma\ [Tabelle: 0{,}975]$
- $\rightarrow$ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2{,}58\sigma\ [Tabelle: 0{,}995]$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) = 0{,}9$$

$$z_2 = \frac{k_2 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu + 1{,}64\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{1{,}64\sigma}{\sigma} = 1{,}64$$

$$z_1 = \frac{k_1 - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - 1{,}64\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{-1{,}64\sigma}{\sigma} = -1{,}64$$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen} \Delta k = 1{,}64\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 1{,}64 \cdot 50 = 82 \rightarrow [98/262]$$

$ana\log:$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen(95\% \rightarrow 97{,}5\%)} \Delta k = 1{,}96\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 1{,}96 \cdot 50 = 98 \rightarrow [82/278]$$

$$\xrightarrow{neue\ Grenzen(99\% \rightarrow 99{,}5\%)} \Delta k = 2{,}58\sigma \xrightarrow{\sigma=50} \Delta k = 2{,}58 \cdot 50 = 129 \rightarrow [51/309]$$

Erwartungswert und Varianz einer diskreten Verteilung (ganzzahlig)

$$\mu(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(X = x_k)$$

$$\sigma^2(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 \cdot P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 \cdot P(X = x_k) - \mu^2$$

Konkret zur Binomialverteilung:

$$\mu(X) = n \cdot p$$

$$\sigma^2(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Erwartungswert und Varianz einer Dichtefunktion (stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung)

$$\mu(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot f(x))\, dx$$

$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x - \mu)^2 \cdot f(x)\right) dx$$

4. Eine Maschine erzeugt Holzplatten, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm.
   a. Bei wie viel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm?
   b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist?

5. Die Lebensdauer eines Ersatzteils ist normalverteilt, mit μ = 180 Tage und σ = 40 Tage.
   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer weniger als 3 Monate beträgt? (1 Monat = 30 Tage)
   b. Bei wie viel Prozent aller Teile weicht die Lebensdauer um weniger als 1 Monat vom Erwartungswert ab?

6. Eine Maschine füllt Mehl in Säckchen ab. Sie ist auf ein Füllgewicht von 1006 g eingestellt, die Standardabweichung beträgt 4 g.
   a. Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten weniger als 1000 g?
   b. Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten zwischen 1000 g und 1010 g?
   c. Bei wie vielen Säckchen weicht das Gewicht um mehr als 10 g vom Erwartungswert ab?

7. Wie schwer muss ein Neugeborenes sein (s. Bsp. 2), damit es
    a. zu den 15% schwersten
    b. zu den 25% leichtesten gehört?
    c. In welchem symmetrischen Bereich [$\mu-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$] liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen?

   (Runde auf 10 g.)

8.
    a. 10% der Äpfel aus Bsp. 3 werden aussortiert, weil sie zu leicht sind. Wie schwer kann ein Apfel höchstens sein, wenn er aussortiert wird?
    b. In welchem symmetrischen Bereich [$\mu-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$] liegen die Gewichte von 50% aller Äpfel? (Quartile)

9. Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 8,00 cm und der Standardabweichung σ = 0,15 cm.
    a. Bei wie viel Prozent der Nägel weicht die Länge höchstens um ε = 0,20 cm vom Erwartungswert μ ab?
    b. Wie sind die Toleranzgrenzen festgelegt, wenn man weiß, dass 90% der Produktion zum Verkauf freigegeben werden?

10. Eine Maschine schneidet Holzplatten mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm und einer Standardabweichung von 0,3 cm zu.
    a. Wie viel Prozent der Platten sind kürzer als 79,5 cm?
    b. 7,2% der Platten sind Ausschuss. Welche Abweichung vom Mittelwert wird dabei toleriert?

11. Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit μ = 100 und σ = 15.
    a. Welchen IQ muss man haben, um zu den intelligentesten 2% der Bevölkerung zu gehören?
    b. Ein Ort hat 1800 Einwohner. Bei wie vielen kann man einen IQ über 120 erwarten?
    c. Wie viele Einwohner haben einen IQ zwischen 80 und 120?

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

12. Eine faire Münze wird 80 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
    a. höchstens 45 mal
    b. zwischen 36 und 42 mal "Kopf" zu werfen?

13. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 300-maligem Würfeln mit einem fairen Würfel
    a. höchstens 40 mal
    b. mehr als 55 mal "Sechs" zu erhalten?

14. Bei einem Glücksrad beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 300 Versuchen
    a. mindestens 50 Gewinne
    b. zwischen (einschließlich) 55 und 65 Gewinne zu erhalten?

15. Ein Medikament hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 80%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 Patienten, die das Medikament einnehmen, höchstens 150 gesund werden?

16. Angenommen, jeder Monat kommt gleich oft als Geburtsmonat vor. Wie groß ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass von den 2250 Einwohnern eines Ortes mindestens 200 im Mai Geburtstag haben?

17. Ein Weinhändler will seine Produkte per Telefonmarketing verkaufen. Es wird angenommen, dass jeder 10. Angerufene etwas bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 250 Anrufen mindestens 20 Bestellungen eingehen?

18. 7% aller Eier werden beim Transport beschädigt. Ein Geschäft bekommt eine Lieferung von 1500 Eiern.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 120 oder mehr Eier beschädigt sind?
    b. In welchem symmetrischen Bereich $[\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der beschädigten Eier?
19. Eine Firma nimmt an, dass 45% der Bevölkerung ihr Produkt kennen. Bei einer Umfrage wurden 500 Personen befragt.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 200 Personen angeben, das Produkt zu kennen?
    b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Befragten, die das Produkt kennen, um mehr als 20 vom Erwartungswert ab?

20. Die freiwillige Feuerwehr eines Ortes verfügt über 120 Feuerwehrleute, von denen jeder mit 60% Wahrscheinlichkeit sofort verfügbar ist.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Ernstfall mindestens 70 Feuerwehrleute zur Verfügung stehen?
    b. Gib einen 90%-Streubereich [$\mu-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$] für die Anzahl der verfügbaren Feuerwehrleute an!

21. Eine Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus (300 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80% der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.
    a. In welchem Bereich liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
    b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden?
    c. Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20%igen Überbuchung (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 301 Passagiere kommen)?
    d. (*) Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 1% betragen soll?

Quelle:
http://teaching.schule.at/Mam/hw5/janicbloch/indexdateien/normal/uebungen_norm.htm
http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/wahrsch3_ueb.htm

Ergebnisse (Normalverteilung)

1. a) 0,0228 b) 0,2514 c) 0,5724
2. a) 0,5987 b) 0,1894 c) 0,1465
3. a) 27,43% b) 53,98% c) 26,38%
4. a) 59,35% b) 0,0475
5. a) 0,0122 b) 54,67%
6. a) 6,68% b) 77,45% c) 1,24%

7. a) < 169 cm b) > 185 cm c) [160 cm, 190 cm]
8. a) > 4030 g b) < 2660 g c) [1890 g, 4510 g]
9. a) < 116 g b) [146 g, 214 g]
10. a) 81,8% b) 8 ± 0,25 cm
11. a) 4,75% b) 80 ± 0,54 cm
12. a) 131 b) 165 c) 1470

In Klammern sind die Ergebnisse mit Stetigkeitskorrektur angegeben.

13. a) 0,8686 (0,8907) b) 0,4869 (0,5561)
14. a) 0,0606 (0,0708) b) 0,2206 (0,1977)
15. a) 0,9251 (0,9357) b) 0,5285 (0,5705)
16. 0,0384 (0,0465)
17. 0,17117 (0,1788)
18. 0,8531 (0,8770)
19. a) 0,0643 (0,0708) b) [85, 125]
20. a) 0,0122 (0,0110) b) 0,0719 (0,0658)
21. a) 0,6443 (0,6808) b) [63; 81]
22. a) [226; 254] b) 7,5% (8,5%) c) 4,3% (4,9%) d) 354

Ergebnisse

Zum Inhaltsverzeichnis

http://de.wikibooks.org/wiki/Mathematik:_Statistik:_Normalverteilung

Beispiel:

Auf einer Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern werden eine Woche lang die einzelnen Eier gewogen. Definieren wir die Zufallsvariable X: Gewicht eines Eis in Gramm. Es stellt sich heraus, dass ein Ei im Durchschnitt 50 g wiegt. Der Erwartungswert *EX* ist daher 50. Außerdem sei bekannt, dass die Varianz varX = 25 g^2 beträgt. Man kann die Verteilung des Gewichts annähernd wie in der Grafik darstellen. Man sieht, dass sich die meisten Eier in der Nähe des Erwartungswerts 50 befinden und dass die Wahrscheinlichkeit, sehr kleine oder sehr große Eier zu erhalten, sehr klein wird. Wir haben hier eine

Normalverteilung vor uns. Sie ist typisch für Zufallsvariablen, die sich aus sehr vielen verschiedenen Einflüssen zusammensetzen, die man nicht mehr trennen kann, z.B. Gewicht des Huhns, Alter, Gesundheit, Standort, Vererbung usw.

Übungen zum Eier-Beispiel

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ei höchstens 60 g wiegt?
2. Wieviel Prozent der Eier wiegen höchstens 50 g?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ei mindestens 45 g wiegt?
4. Wieviel Prozent der Eier liegen zwischen 45 und 55 Gramm?
5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wiegt ein Ei genau 53 Gramm?
6. Welches Mindestgewicht haben die 30% schwersten Eier?

Lösungen:

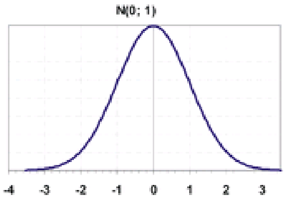
Übung zur Berechnung von $\Phi_z(z)$

a) 0,6950 b) 0,9772 c) 0,3050 d) 0,0574 e) 0,6412 f) 0,8133 g) 0,0693 h) 0,05 i) 0 j) 1,96 k) 0,84 l) -0,84

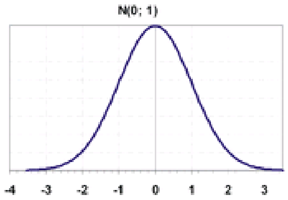
Übung zur Berechnung von $\Phi_Z(z)$

Schraffieren Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit in der Grafik und berechnen Sie die gesuchten Werte:

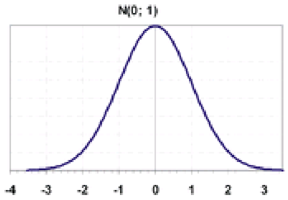
$P(Z \leq 0{,}51)$



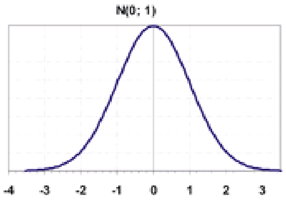
$P(Z \leq 2{,}0) =$



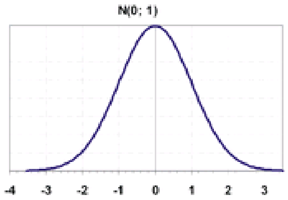
$P(Z \leq -0{,}51)$



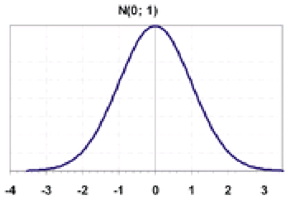
$P(1{,}5 \leq Z \leq 2{,}35)$



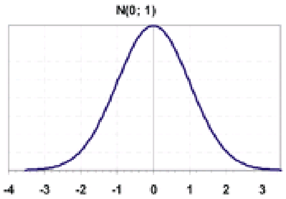
$P(-0{,}8 \leq Z \leq 1{,}05)$



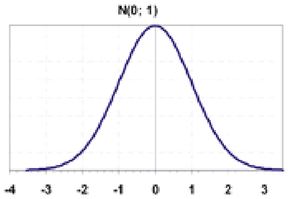
$P(Z \geq -0{,}89)$



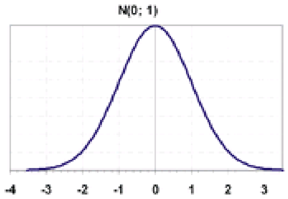
P(Z ≤ -1,68 □ Z ≥ 2)



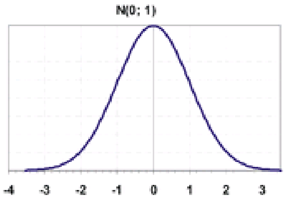
P(Z ≤ -1,96 □ Z ≥ 1,96)



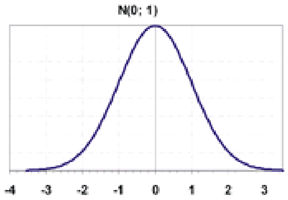
$P(Z \leq -5)$



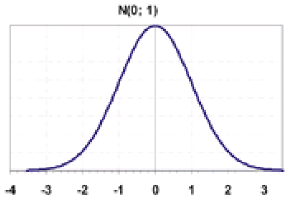
z(0,975)



z(0,8)



z(0,2)



http://www.mpg.goe.ni.schule.de/downloads/Mathe/Normalverteilung.pdf

http://www.uni-stuttgart.de/bio/adamek/numerik/uestat,loe,b2.pdf

http://www.ulrich-rapp.de/stoff/statistik/index.htm